УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ № 2 (41)

СИМФЕРОПОЛЬСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Математика. Физика. Химия. Биология.
Физическая культура.

СИНТЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ НЕПОЛНЫХ ДАННЫХ

В.И.Донской, доктор физико-математических наук, профессор

Введение

Пусть X - произвольное множество альтернатив, в котором полагаются существующими подмножества, называемые множеством допустимых альтернатив X и множеством наилучших альтернатив $\{\mathrm{x}^*\}$, такие, что $\{\mathrm{x}^*\} \subset X \subset \mathrm{X}$. Предполагается, что все элементы в $\{\mathrm{x}^*\}$ равноценны по некоторому целевому критерию выбора. Подмножество $\{\mathrm{x}^*\}$, способ его выявления и даже само множество X не заданы полностью: существует лишь некоторая информация $\mathrm{I}_0 = \mathrm{I}_0(X, \{\mathrm{x}^*\})$, на основе которой формулируется задача D: используя информацию I_0, отыскать в X множество наилучших альтернатив $\{x^*\}$ или хотя бы один из элементов этого множества.

Пусть $\{\mathrm{I}\} = \{\mathrm{I}(X), \{\mathrm{x}^*\}\}$ - множество различных информаций; элементы множества $\{\mathrm{I}\}$ будем обозначать символами $\mathrm{I}_0, \mathrm{I}_1, \ldots$. Пространством возможных информаций J будем называть замыкание множества $\{\mathrm{I}\}$ относительно любого числа объединений и пересечений его элементов.

Множество всех альтернатив x таких, что наличие информации I_0 влечет истинность предиката "$\mathrm{x} \notin \{\mathrm{x}^*\}$" обозначим $\overline{\mathfrak{R}_0}$; множество $\mathfrak{R}_0 = \mathrm{X} \setminus \overline{\mathfrak{R}_0}$ назовем исходной областью неопределенности выбора альтернатив в задаче D; любое множество $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}_0$ <u>назовем областью неопределенности.</u>

Решение задачи D предполагает синтез алгоритма A, реализующего отображение

$$\mathrm{A}: \mathrm{J} \to 2^{\mathrm{X}},$$

где 2^{X} - булеан множества X. Будем обозначать $\{\mathrm{A}\}$ - множество любых таких алгоритмов и $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots$ - его произвольные элементы.

Алгоритм A называется <u>точным</u> на информации $\mathrm{I} \in \mathrm{J}$, если $\mathrm{A}(\mathrm{I}) \subseteq \{\mathrm{x}^*\}$ и <u>абсолютно точным</u>, если $\mathrm{A}(\mathrm{I}) = \{\mathrm{x}^*\}$. Если для информации I найдется точный (абсолютно точный) алгоритм $\mathrm{A} \in \{\mathrm{A}\}$, то эта информация называется <u>полной</u> (абсолютно полной). В противном случае информация I называется <u>неполной</u>, и речь идет о неполных данных.

Алгоритм A называется согласованным с информацией I для задачи D_I, если $\{\mathrm{x}^*\} \subseteq \mathrm{A}(\mathrm{I}) \subseteq \mathfrak{R}_0$. Если к задаче D применен согласованный алгоритм A, то получено множество $\mathfrak{R}_\mathrm{A} = \mathrm{A}(\mathrm{I}_0)$ такое, что $\{\mathrm{x}^*\} \subseteq \mathfrak{R}_\mathrm{A}$. Полученное соотношение есть ни что иное, как некоторая информация о множестве $\{\mathrm{x}^*\}$, которую обозначим I_A. Эта информация, вообще говоря, может пополнить исходную информацию I_0 и позволить далее располагать информацией $\hat{I}_0 = I_0 \cup I_A$.

Пусть имеется начальная информация $I_0 \in J$. Любую информацию $I_1 \in J$ будем называть дополнительной, если $I_0 \neq I_1 \neq \varnothing$. Дополнительная информация I_1 называется сужающей, если найдется такой согласованный алгоритм $A_1 \in \{A\}$, что выполняются включения: $A(I_0) \supset A_1(\hat{I}_0 \cup I_1) \supseteq \{x^*\}$, где A - произвольный согласованный алгоритм.

Последовательный процесс сужения области неопределенности при решении задачи D с исходной информацией I_0 состоит в нахождении такой последовательности дополнительных информаций $I_1, \dots, I_k$ и синтеза таких алгоритмов $A_0, A_1, \dots, A_k$, что

$$A_0(I_0) \supset A_1(\hat{I}_0 \cup I_1) \supset \dots \supset A_k(\hat{I}_{k-1} \cup I_k) \supseteq \{x_k^*\}.$$

Принцип наибольшего сужения области неопределенности в случае конечных дискретных множеств предполагает использование дополнительной информации и выбор алгоритмов так, чтобы мощность множества $\{\mathfrak{R}_{j-1} \setminus \mathfrak{R}_j\}$ была как можно большей, $\mathfrak{R}_j = A_j(\hat{I}_{j-1} \cup I_j)$, $j = \overline{1,k}$.

В данной статье рассматривается класс задач дискретной оптимизации, для которых имеются неполные данные о некоторых компонентах модели

$$\operatorname{extr} f(\tilde{x}) \,/\, \tilde{x} \in \Omega \subset B^n; B^n = \{0,1\}^n;$$

$$f\colon B^n \to R;\ \tilde{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

Иначе говоря, предполагается существование функции f и непустого множества Ω, которые задаются некоторой неполной информацией $I_0 = I_0(f, \Omega)$. Нахождение по этой информации I_0 решения

$$\{x^*\} = \arg \operatorname{extr} f(\tilde{x}) \,/\, \tilde{x} \in \Omega$$

и является решаемой задачей.

1. Принципы синтетического подхода.

Существуют разнообразные практические постановки задач дискретной оптимизации с неполной информацией, и применяемые подходы к решению зависят от того, как эта информация представлена.

Целевая функция f может быть частично задана в некоторых точках-вершинах единичного n-мерного куба B^n. Может быть частично задано отношение предпочтения:

$$\rho_\Delta \subset \rho \stackrel{\Delta}{=} \{(\tilde{x}, \tilde{y}),\ f(\tilde{x}) \le f(\tilde{y})\}.$$

Множество Ω может быть представлено набором прецедентов $\{M_0 \cup M_1\}$ таким, что точно известно: $M_0 \subset \Omega$, $M_1 \subset \{B^n \setminus \Omega\}$. В этом случае для восстановления множества обычно применяют методы эмпирической индукции (распознавание образов) [1]. Возможно частичное задание множества Ω некоторой логической системой продукций [2], определяющей алгоритмы вычисления истинности предиката $g_0(\tilde{x}) \equiv$" $\tilde{x} \in \Omega$" на некотором подмножестве $M_0 \subset \Omega$ и $g_1(\tilde{x}) \equiv$" $\tilde{x} \notin \Omega$" на подмножестве $M_1 \subset \{B^n \setminus \Omega\}$.

Дискретные модели оптимизации с неполной исходной информацией представляют подкласс моделей принятия решений, и их изучение и создание соответствующих численных методов имеют важное значение для развития информационных систем поддержки принятия решений и проблематики искусственного интеллекта.

С целью существенного продвижения вперед в области построения дискретных моделей принятия решений, удовлетворения потребностей разработчиков интеллектуализированных систем в информатике, повышения точности и обоснованности решений разработан синтетический подход, основные принципы которого состоят в следующем.

1. Соединение, комбинирование методов принятия решений, использующих различную исходную информацию, существенно дополняющих друг друга, например, эмпирической индукции и дедуктивного вывода на основе баз знаний.

2. Принятие решений на основе синтеза и сопоставления логических описаний областей истинности заключений, построенных различными методами.

3. Привлечение разнообразной дополнительной информации, обеспечивающей наибольшее сужение области неопределенности, выявление и использование для этой цели математических свойств моделей решений - дискретности, линейности, монотонности, соответствия определенной структуре (например, матроидной) и т.п.

4. Комбинирование математических методов, привлечение для выбора альтернатив разнообразного математического аппарата, совместно используемого при решении задачи, например, теории игр и минимизации дизъюнктивных форм, методов оптимизации и распознавания образов.

2. Каноническое представление задачи.

Обозначим класс псевдобулевых функций $PS_2(n) \overset{\Delta}{=} \{f: B^n \to R\}$.

Определение 2.1. Две формы представления оптимизационной задачи называются эквивалентными, если множества их решений в точности совпадают.

Теорема 2.1. [3]. Для любой задачи условной оптимизации в форме

$$\operatorname{extr} f(\tilde{x}) \;/\; \tilde{x} \in \Omega,\ \tilde{x} \in B^n, \qquad (2.1)$$

существуют эквивалентные формы представления:

$$\text{а) } \operatorname{extr} f(\tilde{x}) \;/\; h(\tilde{x}) \le 0,\ \tilde{x} \in B^n, \qquad (2.2)$$

с единственным ограничением в виде нестрогого неравенства, где есть некоторый полином, и

$$\text{б) } \operatorname{extr} f(\tilde{x}) \;/\; \bigvee_{j=1}^{m} x_{j_1}^{\sigma_{j_1}} \& \ldots \& x_{j_{r_j}}^{\sigma_{j r_j}} = 1, \qquad (2.3)$$

где $x^{\sigma} = x$, если $\sigma = 1$, $x^{\sigma} = \bar{x}$, если $\sigma = 0$.

Представление задачи (2.1) в форме (2.3) будем называть каноническим. Это представление имеет ограничение в виде логического уравнения с дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) в левой части. Такое ограничение называется дизъюнктивным или ДНФ-ограничением.

Каноническое представление задачи (2.3) имеет большое значение для реализации синтетического подхода. В частности, ДНФ-ограничение может быть синтезировано и при помощи индуктивного обобщения неполной информации о прецедентах, и путем построения логического описания области выводимости факта "быть допустимым решением".

Далее приводятся конкретные способы реализации синтетического подхода к решению дискретных задач оптимизации с неполной информацией.

3. Сужение области неопределенности на основе дополнительной информации о линейности задачи

Задачи вида

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \;/\; \sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_i \le B_j;\ j = \overline{1, m} \\ x_i \in \{0,1\};\ a_i \ge 0;\ B_j \ge 0;\ b_{ij} \ge 0;\ i = \overline{1, n} \end{cases} \qquad (3.1)$$

называются задачами линейного булевого программирования с неотрицательными коэффициентами.

Зададим функции алгебры логики (ф.а.л.) $F_j(\tilde{x})$, $j = \overline{1, m}$, так, что

$$\left(F_j(\tilde{x}) = 0\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}x_i - B_j \le 0\right).$$

Тогда F_j - монотонные ф.а.л. [1]; функция

$$F_0(\tilde{x}) = \bigvee_{j=1}^{m} F_j(\tilde{x})$$

также является монотонной и описывает область допустимых решений Ω в задаче (3.1.): $\Omega = \left\{\tilde{x} \in B^n: F_0(\tilde{x}) = 0\right\}$.

Теперь рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \\ \text{при условии, что заданы подмножества} \\ M_0^f \subset M_0^{F_0};\ M_1^f \subset M_1^{F_0} \\ \text{такие, что каждый набор } \tilde{x} \in M_0^f \text{ является} \\ \text{допустимым решением, а каждый набор } \tilde{x} \in M_1^f \\ \text{таковым не является;} \\ \tilde{x} \in B^n;\ a_i \ge 0,\ i = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{3.2}$$

В этой задаче предполагается, что существуют множества $M_0^{F_0} = \left\{\tilde{x} \in B^n: F_0(\tilde{x}) = 0\right\}, M_1^{F_0} = \left\{\tilde{x} \in B^n: F_0(\tilde{x}) = 1\right\}$, но $F_0(\tilde{x})$ — функция, определяющая допустимые решения задачи, — задана частично указанием множеств наборов M_0^f, M_1^f, т.е. задана некоторая частичная ф.а.л.

Пусть известно, что задача (3.2.) получена как неполное представление задачи (3.1): например, при исследовании заведомо линейной модели не удалось получить полную информацию о ее ограничениях. В таком случае функция $F_0(\tilde{x})$ является монотонной ф.а.л., и проблема нахождения множества допустимых решений Ω сводится к отысканию монотонной функции $F_0(\tilde{x})$.

Теорема 3.1. [1] . Функция $f \in P_2(n)$, не являющаяся константой, монотонна в том и только в том случае, если для любых пар вершин $\tilde{x}, \tilde{y} \in B^n$, в которых $f(\tilde{x}) = 1$ и $f(\tilde{y}) = 0$, найдется переменная с номером $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ такая, что $x_i = 1$ и $y_i = 0$.

<u>Следствие.</u> Если во множествах M_0^f и M_1^f частичной ф.а.л. f найдутся такие наборы $\tilde{\alpha} \in M_0^f$ и $\tilde{\beta} \in M_1^f$, что не существует переменной с номером $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, для которой $\alpha_i \prec \beta_i$, то f не может быть доопределена монотонной функцией.

Пусть $\Phi \subset P_2(n)$ - класс монотонных функций таких, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ выполняется условие:

$$\left[\forall\tilde{x} \in M_0^f\left(\varphi(\tilde{x}) = 0\right)\right] \wedge \left[\forall\tilde{x} \in M_1^f\left(\varphi(\tilde{x}) = 1\right)\right] \tag{3.3}$$

Очевидно, $F_0 \in \Phi$, и произвольная функция $\varphi \in \Phi$ может отличаться от F_0 только на множестве $B^n \setminus \left\{M_0^f \cup M_1^f\right\}$.

Если F - класс произвольных функций из $P_2(n)$, удовлетворяющих условию (3.3), а $\{x^*\}$ - множество решений задачи (3.1), являющейся "порождающей" для задачи (3.2), то выполняются включения:

$$M_0^F \supset M_0^\Phi \supset \{x^*\} \quad (3.4)$$

где $M_0^F = \bigcup_{g \in F} \{\tilde{x}\ g(\tilde{x}) = 0\}$, $M_0^\Phi = \bigcup_{\varphi \in \Phi} \{\tilde{x}\ \varphi(\tilde{x}) = 0\}$.

Соотношения (3.4) доказывают, что дополнительная информация о линейности задачи (3.2) является сужающей, а соответствующий согласованный алгоритм немедленно "выписывается" из условия - критерия теоремы 3.1 и начальной информации о задаче (3.2).

Алгоритм 3.1.

Шаг 1. Для каждого набора $\tilde{\alpha} \in M_0^f$ выписать конъюнктивную нормальную форму (к.н.ф.) $K(\tilde{\alpha})$, каждая дизъюнкция которой состоит из переменных $\tilde{x}_i$ (с инверсиями) таких, что $\alpha_i \prec \beta_i$ для одного из наборов $\tilde{\beta} \in M_1^f$; к.н.ф. $K(\tilde{\alpha})$ будет содержать $m_1 = |M_1^f|$ дизъюнкций - ровно столько, сколько наборов содержится во множестве M_1^f.

Шаг 2. В полученных к.н.ф. $K(\tilde{\alpha}_1), \ldots, K(\tilde{\alpha}_{m_0})$ раскрыть скобки и выполнить операции поглощения, получая д.н.ф. $D_1, \ldots, D_m$.

Шаг 3. Записать д.н.ф. $D_1 \vee \ldots \vee D_m$ и выполнить все возможные операции поглощения. Будет получена некоторая д.н.ф. D^*.

Замечание. Выполнение шага 1 в алгоритме с учетом сформулированной теоремы возможно тогда и только тогда, когда информация в задаче (3.2) не противоречит условию монотонности.

Лемма 3.1. Конъюнкции д.н.ф. D^* перечисляют все альтернативные варианты несокращаемых наборов необходимых нулей в экстремальных решениях $\{x^*\}$, удовлетворяющих дополнительной информации о линейности ограничений (монотонности функции F_0).

Лемма 3.2. $\overline{D^*} \in \Phi$.

Доказательство. Д.н.ф. D^* содержит только отрицательные литералы, поэтому формула $\overline{D^*}$ может быть представлена путем очевидных преобразований в виде д.н.ф., содержащей только положительные литералы, и монотонность $\overline{D^*}$ следует из монотонности конъюнкции, дизъюнкции и замкнутости монотонных ф.а.л. Обозначим $M_0^{\overline{D^*}} = \{\tilde{x}\ D(\tilde{x}) = 1\}$

Лемма 3.3. $M_0^\Phi = M_0^{\overline{D^*}}$.

Доказательство. Пусть $\tilde{x} \in M_0^\Phi$. Тогда $\forall \varphi \in \Phi$ имеем $\varphi(\tilde{x}) = 0$, но $\overline{D^*} \in \overline{\Phi}$ по лемме 3.2, поэтому $\overline{D^*}(\tilde{x}) = 0 \Leftrightarrow D^*(\tilde{x}) = 1$, и $\tilde{x} \in M_0^{\overline{D^*}}$.

Обратно, пусть $\tilde{x} \in M_0^{\overline{D^*}}$, т.е. $D^*(\tilde{x}) = 1$. Тогда, по лемме 3.1, $\tilde{x}$ принадлежит объединению максимальных вне множества M_1^f интервалов, каждый из которых содержит хотя бы одну точку из M_0^f, поэтому $\tilde{x} \in M_0^\Phi$.

Следствие. Алгоритм 3.1 является согласованным с начальной информацией задачи (3.2), и дополнительная информация о линейности является сужающей:

$$\{\tilde{x}^*\} \subset M_0^{\overline{D^*}} = M_0^\Phi \subset M_0^F = \{B^n \setminus M_1^f\}.$$

Полученная дополнительная информация может быть представлена в виде дизъюнктивного ограничения $D^*(\tilde{x}) = 1$, присоединяемого к задаче 3.2.

Множества M_0^f и M_1^f, являющиеся частью исходной информации в задаче 3.2, можно рассматривать как стандартную обучающую информацию для задачи распознавания свойства " $\tilde{x} \in \Omega$" [1].

Решение такой задачи и получение правила классификации в виде д.н.ф. D_R позволяют обосновать выбор решения $\tilde{x}$ из множества $M_0^{\overline{D^*}}$ [1], причем синтезируется каноническое представление задачи с новым дизъюнктивным ограничением $(D^* \wedge D_R)(\tilde{x}) = 1$.

4. Анализ начальной информации и условие точного решения задачи в канонической форме с неполной информацией о целевой функции

Ниже изложен синтетический метод решения задачи оптимизации слабоопределенной линейной псевдобулевой функции с дизъюнктивным ограничением, основанный на нахождении при помощи прецедентной начальной информации системы образующих $\tilde{C} = (C_1, \ldots, C_q)$ выпуклого многогранного конуса $K(\tilde{C}) \subset R^n$, которому принадлежит неизвестный вектор C_0 коэффициентов линейной целевой функции задачи

$$\max(C_0, \tilde{x}) \;/\; \tilde{x} \in \Omega \subset B^n.$$

Область допустимых решений Ω предполагается точно заданной дизъюнктивным ограничением

$$\bigvee_{j=1}^{m} K_j(\tilde{x}) = 1; \quad K_j(\tilde{x}) = x_{j_1}^{\sigma_{j_1}} \& \ldots \& x_{j_{r_j}}^{\sigma_{j_{r_j}}};$$

$$\Omega = \left\{\tilde{x} \in B^n : \bigvee_{j=1}^{m} K_j(\tilde{x}) = 1;\right\}$$

Теорема 4.1. Пусть $C_0 \in K(\tilde{C})$, $C_0 \neq 0$, и

$$\forall C \in \mathbf{conv}(\tilde{C}) \quad (C, \tilde{x}^*) = \max_{\tilde{x} \in \Omega}(C, \tilde{x})$$

тогда $(C_0, \tilde{x}^*) = \max(C_0, \tilde{x}) \;/\; \tilde{x} \in \Omega$.

Используя эту теорему и представление множества Ω его покрытием $\Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_j \cup \ldots \cup \Omega_m$ таким, что $(\tilde{x} \in \Omega_j) \Leftrightarrow (K_j(\tilde{x}) = 1)$, $j = \overline{1, m}$, осуществляется решение m задач на выпуклой оболочке системы $\tilde{C}$:

$$\max\left(\sum_{k=1}^{q} \lambda_k C_k, \tilde{x}\right) \;/\; K_j(\tilde{x}) = 1; \quad \sum_{k=1}^{q} \lambda_k = 1; \quad \lambda_k \geq 0, \quad k = \overline{1, q}.$$

Использование дополнительной информации о знаках неизвестного вектора C_0 позволяет получить простое правило вычисления булевых векторов $\tilde{\alpha}_j \in \Omega_j$ таких, что

$$\forall C \in \mathbf{conv}(\tilde{C}) \quad \forall \tilde{x} \in \Omega_j \quad (C, \tilde{\alpha}_j) \geq (C, \tilde{x}).$$

Координаты векторов $\tilde{\alpha}_j = (\alpha_1^j, \ldots, \alpha_n^j)$ определяются по формулам:

$$\alpha_i^j = \begin{cases} \sigma_i, & i \in \{j_1, \ldots, j_{r_j}\}, \\ 1, & (i \notin \{j_1, \ldots, j_{r_j}\}) \& (c_{i0} \succ 0), \\ 0, & (i \notin \{j_1, \ldots, j_{r_j}\}) \& (c_{i0} \prec 0), \\ \Delta, & (i \notin \{j_1, \ldots, j_{r_j}\}) \& (c_{i0} = 0), \end{cases}$$

$i = \overline{1, n}$; Δ - произвольное значение из $\{0,1\}$.

Далее рассматриваются задачи

$$\begin{cases} \max \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^j \left(\lambda_1 C_{1i} + \ldots + \lambda_q C_{qi}\right) \\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_q = 1; \ \lambda_k \ge 0, \ k = \overline{1, q}; \end{cases} \qquad (4.1j)$$

$$\left(j = \overline{1, m}\right)$$

$$\begin{cases} \min \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^j \left(\lambda_1 C_{1i} + \ldots + \lambda_q C_{qi}\right) \\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_q = 1; \ \lambda_k \ge 0, \ k = \overline{1, q}; \end{cases} \qquad (4.2j)$$

Экстремумы задач $(4.1j)$ и $(4.2j)$ достигаются в вершинах $(q-1)$-мерного симплекса и определяются путем нахождения величин $B_j = \max\limits_{1\le k\le q} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^j C_{ki}$;

$A_j = \min\limits_{1\le k\le q} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^j C_{ki}$; $j = \overline{1, m}$.

Найденные величины удовлетворяют неравенствам: $\forall C \in \mathrm{conv}(\tilde{C})$;

$$\left(A_j \le \max_{\tilde{x} \in \Omega_j} (C, \tilde{x}) = (C, \tilde{\alpha}_j) \le B_j\right),$$

из которых с учетом теоремы 4.1 следует, что при выполнении условия

$$\exists j^*: \ \forall j \ne j^* \left(A_{j^*} \ge B_j\right)$$

исходная задача решается точно: $\left(C_0, \tilde{\alpha}_{j^*}\right) = \max\left(C_0, \tilde{x}\right) / \ \tilde{x} \in \Omega$. В противном случае применяется теоретико-игровой подход к выбору решения, приводящий к решению матричной игры со стратегиями выбора решений $\tilde{\alpha}_j$ с одной стороны, стратегиями (Природы) выбора образующих $\left(C_1, \ldots, C_q\right)$ - с другой и с платежной матрицей

$$\left\| h_{ik} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^j C_{ki} \right\|_{m \times q}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Донской В.И. Слабоопределенные задачи линейного булевого программирования с частично заданным множеством допустимых решений //Журнал вычисл. математики и матем. физики. 1988. Т.28, №9, с. 1379 - 1385.

2. Донской В.И. Логические продукционные системы: анализ и синтез //Кибернетика и системный анализ. 1994, №5, с. 1 - 21.

3. Донской В.И. Задачи псевдобулевой оптимизации с дизъюнктивным ограничением //Журнал вычисл. математики и матем. физики. 1994. Т. 34, №2, с. 461 - 472.

4. Донской В.И. Дуальные экспертные системы //Изд. Российской АН. Техническая кибернетика. 1993. №5, с. 111 - 119.