РЕГУЛЯРНЫЕ U-ИНВАРИАНТНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. В. Кужель, доктор физико-математических наук, профессор

1. Предварительные понятия и результаты. Пусть A - эрмитов оператор с индексом дефекта (m, m) $(m \le \infty)$, действующий в гильбертовом пространстве H, U - некоторое множество унитарных в H операторов и такое, что из $U \in U$ сдедует $U^* \in U$.

Определение. Оператор A называется U- инвариантным, если он коммутирует с любым оператором U из U.

В работе Филипса /3/ показано, что расширение по Фридрихсу U-инвариантного полуограниченного симметрического оператора A U-инвариантно. С другой стороны, в той же работе построен пример U-инвариантного (относительно некоторого коммутативного семейства U) симметрического оператора с индексом дефекта $(1,1)$, не имеющего U-инвариантных самосопряженных расширений.

В работе Кочубея /1/ вопрос о существовании U-инвариантных самосопряженных расширений симметрического оператора A решается в терминах характеристической функции А.В.Штрауса /4/.

Здесь приводится отличное от первоначального обоснование теоремы Р.Филипса, а также устанавливаются условия существования регулярных (в частности, самосопряженных) U-инвариантных расширений эрмитовых (не обязательно плотно заданных) U-инвариантных операторов.

В п.5 анализируется пример U-инвариантного симметрического оператора A, не имеющего U-инвариантных самосопряженных расширений. При этом отмечается особенность диссипативного расширения A_λ оператора A, определяемого равенством /27/, которая состоит в том, что точечный спектр оператора A_λ заполняет всю плоскость.

2. Некоторые общие свойства U-инвариантных эрмитовых операторов.

Предложение 1. Пусть A -эрмитов U-инвариантный оператор. Тогда при любых $U \in U$ и $\lambda \in C$

$$U : D_A \to D_A,\ U : \mathfrak{N}_\lambda \to \mathfrak{N}_\lambda$$

где $\mathfrak{N}_\lambda$- дефектное подпространство оператора A.

□ Первое соотношение из /1/ вытекает из равенства $AU = UA$ $(\forall U \in U)$. Для доказательства второго соотношения из /1/ заметим, что при любых $x \in D_A$ и $x_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda$ $((A - \lambda I)x,\ U x_\lambda) = (U^* (A - \lambda I)x,\ x_\lambda) = ((A - \lambda I)U^* x,\ x_\lambda) = 0$, и, следовательно, $U : \mathfrak{N}_\lambda \to \mathfrak{N}_\lambda$ ■

Лемма 2. Замыкание U-инвариантиого оператора также есть U-инвариантный оператор.

□ Пусть A – U-инвариантный оператор и $\bar{A}$ – его замыкание. Тогда, если $x_n \in D_A, x_n \to x$ и $Ax_n \to y$, то $x \in D_{\bar{A}}$ и $y = \bar{A}x$.

Пусть, далее, $U \in U$. Так как $U x_n \to U x$ и то $U x_n \in D_A$, то $A U x_n = U A x_n \to U y$. Но тогда $U x \in D_{\bar{A}}$ и $\bar{A}Ux = Uy = U\bar{A}x$, то есть $\bar{A}U = U\bar{A}$. ■

Теорема 3. Если замкнутый U-инвариантный оператор A имеет хотя бы одну вещественную точку регулярного типа, то у оператора A существует U-инвариантное самосопраженное решение.

□ Пусть $\lambda \in \pi(A) \cap R$, где $\pi(A)$ — множество точек регулярного типа (см. напр., /2/. §1), линеалы D_A и $\mathfrak{N}_\lambda$ инейно независимы. Рассмотрим на линеале $D_{\tilde{A}} = D_A + \mathfrak{N}_\lambda$ эрмитов оператор $\tilde{A}$, определяемый равенством $\tilde{A}(x_0 + x_\lambda) = \tilde{A}x_0 + \lambda x_0 (x_0 + D_A, x_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda)$. На основании предложения 1 оператор $\tilde{A}$ является U-инвариантным.

Кроме того, рассуждая так же, как и в /2/ (§3 ,доказательство теоремы фон Неймана) убеждаемся, что эрмитов оператор $\tilde{A}$ плотно определен и его дефектные числа равны нулю. Замыкание этого оператора есть самосопряженный оператор, который, на основании леммы 2, является U-инвариантным. ■

3. Полуограниченные операторы. Теорема Филипса.

Теорема 4. Фридрихсово расширение U - инвариантного полуограниченого симметрического оператора A U- инвариантно.

□ В соответствии с пунктом 3.1 без ограничения общности можем считать, что оператор A удовлетворяет условию (см /2/ §3)

$$(Ax, x) \geq (x, x) \quad (x \in D_A)$$

Пусть $(\bullet,\bullet)_\circ$-скалярное произведение, определяемое на линеале D_A равенством

$$(x, y)_\circ = (Ax, y) \quad (\{x, y\} \subset D_A) \quad /2/$$

Если $U \in U$, то иа основании /1/ $U: D_A \to D_A$

При этом $(Ux, Uy)_\circ = (AUx, Uy) = (UAx, Uy) = (x, y)_\circ$.

Таким образом, U есть унитарный оператор в предгильбертовом пространстве D_A. Расширяя оператор U по непрерывности на все пространство D_0, получим унитарный оператор U_0, действующий в D_0 (относительно пространства D_0 (см /2/§3). При этом, если $x \in D_0$ и $x_n \to x / x_n \in D_A /$, то

$$\|Ux_n - Ux\| = \|x_n - x\| \leq \|x_n - x\|_\circ = \|Ux_n - U_0 x\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

и, следовательно, $Ux_n \to Ux$. А это означает, что $U_0 x = Ux$, то есть U_0 есть сужение оператора U иа линеал D_0.

Итак, оператор $U_0 = U/D_0$ является унитарным оператором в гильбертовом пространстве D_0. Кроме того, так как $U^* \in U$, то, по аналогии с предыдущим, $U^*: D_0 \to D_0$. При этом если $y \in D_A$, $x \in D_0$ то,

$$(U^*x, y)_\circ = (x, Uy)_\circ = (x, U_0 y)_\circ = (U^*x, y)_\circ,$$

откуда следует, что $U_0^* = U^*/D_0$.

Пусть $\tilde{A}$ - расширение по Фридрихсу оператора A. На основании равенства (3.27) из /2/

$$\tilde{A}x = A^*x \quad (D_A = D_{A^*} \cap D_0).$$

Поэтому, в соответствии с равенством $(\tilde{A}x, y) = (x, y)_\circ$ при любых x и y из D_0

$(U\tilde{A}x, y) = (\tilde{A}x, U^* \circ y) = (x, U^* \circ y)_\circ = (U \circ x, y)_\circ = (\tilde{A}Ux, y)$ и, таким образом, $U\tilde{A} = \tilde{A}U$. ■

4. Условия существования рагулярных U -инвариантных расширений в терминах формул фон Неймана. Пусть A -эрмитов U-инвариантный оператор, B - регулярное расширение оператора A и $\lambda \overline{\in} \sigma_\rho(B)$ $/ \operatorname{Im}\lambda \neq 0 /$. Тогда произвольный вектор x из D_B представим в виде (см. /2/, §5)

$$x = x_0 + x_\lambda + \Phi x_\lambda \quad (x_0 \in D_A, x_\lambda \in D_\Phi) \quad /3/$$

где оператор Ф действует из $\mathfrak{N}_\lambda$ в $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$. При этом

$$Bx = Ax_0 + \bar{\lambda}x_\lambda + \lambda\Phi x_\lambda \quad /4/$$

Теорема 5. Регулярное расширение B $\mathcal{U}$ -инвариантного эрмитова оператора A, определяемое равенствами /3/ и /4/, является $\mathcal{U}$ - инвариантным тогда и только тогда, когда $\mathcal{U}$ -инвариантным является оператор Φ в формулах /3/и/4/.

□ Пусть оператор B является $\mathcal{U}$ -инвариантным. Тогда при любых U из $\mathcal{U}$ и $x \in D_B$ вектор $y = Ux \in D_B$. При этом, на основании равенства /3/ и предложения 1,

$$y = y_0 + y_\lambda + U\Phi U^* y_\lambda \quad /5/$$

где $y_0 = Ux_0 \in D_A$, $y_\lambda = Ux_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda$. А так как при фиксированном $\lambda \overline{\in} \sigma_p(B)$ оператор Φ в /3/ определяется однозначно, то, на основании /3/ и /5/ $U\Phi U^* = \Phi$ то есть,

$$U\Phi = \Phi U \ (\forall U \in \mathcal{U}) \quad /6/$$

Очевидно, что и наоборот - если оператор Φ удовлетворяет условию /6/, то, то оператор B, определяемый равенствами /3/ и /6/, является $\mathcal{U}$ -инвариантным.

Теорема 6. Пусть уществует регулярное $\mathcal{U}$ -инвариантное расширение $\mathcal{U}$ - инвариантного эрмитова оператора A, определяемое равенствами /3/ и /4/. Если при этом оператор Φ в указанных равенствах ограничен, определен на всем пространстве $\mathfrak{N}_\lambda$ и $0 \in \rho(\Phi)$, то существуют также и самосопряженное $\mathcal{U}$ -инвариантное расширение оператора A.

□ Пусть $\Phi = V(\Phi)$ - полярное представление оператора Φ и $U \in \mathcal{U}$. Так как, по условию, оператор B является $\mathcal{U}$ -инвариантным расширением оператора A, то, на оновании теоремы 5, оператор U коммутирует с Φ. Но тогда оператор $|\Phi| = \sqrt{\Phi^*\Phi}$, который действует в подпространстве $\mathfrak{N}_\lambda$, также комутирует с U. Кроме того, с учетом условия теореммы оператор $|\Phi|$ отображает $\mathfrak{N}_\lambda$ на $\mathfrak{N}_\lambda$. Поэтому V является унитарным оператором, отображающим $\mathfrak{N}_\lambda$ на $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ и, очевидно, V коммутирует с U /U$\in \mathcal{U}$/.

Рассмотрим оператор S, определяемый следующим образом: произвольный вектор x из D_S представим в виде

$$x = x_0 + x_\lambda + Vx_\lambda \quad (x_0 \in D_A, x_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda)$$

При этом $Sx = Ax_0 + \bar\lambda x_\lambda + \lambda V x_\lambda$.

Заданный так оператор является самосопряженным и комутирует с U то есть S - самосопряженное $\mathcal{U}$ -инвариантное расширение оператора A. ■

5. Условия существования самосопряженных $\mathcal{U}$ -инвариантных расширений в терминах характеристической функции А. В. Штрауса

Пусть A -замкнутый эрмитов оператор, $\lambda(\mathrm{Im}\lambda \prec 0)$ - фикированное число и $\mathfrak{N}_\lambda$ - дефектное подпространство оператора A. Как можно показать (см /4/) оператор A_λ, определяемый на линеале $D_{A_\lambda} = D_A + \mathfrak{N}_\lambda$ равенством

$$A_\lambda(x_0 + x_\lambda) = Ax_0 + \bar\lambda x_\lambda \quad /7/$$

где $x_0 \in D_A$, а $x_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda$, являетя максимальным иссипативным опратром. Если при этом оператор A $\mathcal{U}$ -инвариантен то, очевидно, оператор A_λ также является $\mathcal{U}$ - инвариантным.

Пусть $\mu / \mathrm{Im}\mu \prec 0/$ фиксированная точка. Так как $\mu \in \rho(A_\lambda)$, то, с учетом формул фон Неймана, вектор $x = x_0 + x_\lambda$ из D_{A_λ} представим в виде

$$x = y_0 + y_\mu + \Phi y_\mu \quad /8/$$

где $D_\Phi = \mathfrak{N}_\mu$ (в силу того, что оператор A_λ максимальный); $\Phi: \mathfrak{N}_\mu \to \mathfrak{N}_{\overline{\mu}}$ и, очевидно, при фиксированном μ оператор Φ зависит от $\lambda: \Phi = \Phi_\lambda$. При этом

$$A_\lambda x = Ay_0 + \overline{\mu} y_\mu + \mu \Phi y_\mu \qquad /9/$$

На основании /8/ и /9/

$$(A_\lambda - \mu I)x = (A - \mu I)y_0 + (\overline{\mu} - \mu)y_\mu \qquad /10/$$

Применяя к обеим частям равенства /10/ оператор $(A_\lambda - \mu I)^{-1}$ и учитывая равенство $Ay_0 = A_\lambda y_0$, получим

$$x = y_0 + (\overline{\mu} - \mu) \qquad /11/$$

Из равенства /11/ и /8/ следует, что

$$\Phi_\lambda y_\mu = -(A_\lambda - \overline{\mu} I)(A_\lambda - \mu I)^{-1} y_\mu \qquad /12/$$

В работе А.В.Штрауса /4/ оператор

$$C(\lambda) = (A_\lambda - \overline{\mu} I)(A_\lambda - \mu I)^{-1} \qquad /13/$$

назван характеристической функцией эрмитова оператора A. Таким образом, в случае оператора A_λ оператор Φ_λ из соответствуюших формул фон Неймана лиш знаком отличаетя от характеристической функции $\tilde{N}(\lambda)$ эрмитова оператора A.

<u>Теорема 7.</u> Пусть при некоторых фиксированных $\lambda / \mathrm{Im}\lambda \prec 0/$ и $\mu / \mathrm{Im}\mu \prec 0/$ $0 \in \rho(C(\lambda))$

Тогда существует самосопряженное U-инвариантное расширение U-иивариантного эрмитова оператора A.

☐ Действительно, если A - инвариантный эрмитов оператор и $U \in U$, то, на осиовании равенства /7/, A_λ коммутирует с U. Но тогда из равенства /13/ следует, что оператор $C(\lambda)$ также коммутирует с оператором U. Для завершения доказательства теоремы остается воспользоваться равенством $\Phi_\lambda = -C(\lambda)$ и теоремами 5 и 6.

<u>6. Симметрический U-инвариантный оператор, не имеющий U-инвариантных самосопряженных расширений.</u> Рассмотрим в пространстве $I = \ell_2(-\infty, \infty)$ оператор V, который определяется следующим образом:

$$D_V = \{x \in I \mid x = (\ldots, x_{-2}, x_{-1}, [0], x_1, x_2, \ldots)\} \quad /14/$$

$$Vx = (\ldots, x_{-3}, x_{-2}, [x_{-1}], 0, x_1, x_2, \ldots) \qquad /15/$$

Таким образом, для любых x и y из D_V $(Vx, Vy) = (x, y)$ то есть V — изометрический оператор. При этом, как легко убедиться, $1 \overline{\in} \sigma_p(V)$. Это дает возможность рассмотреть оператор A:

$$A = i(V + I)(V - I)^{-1} \quad (D_A = \Delta_{V-I}) \qquad /16/$$

который является эрмитовым (как преобразование Кели изометрического оператора).

Покажем, что оператор A плотно определен и, таким образом, является симметрическим оператором. Действительно, пусть вектор $h = (\ldots, h_{-1}, [h_0], h_1, \ldots)$ ортогонален линеалу D_A. Тогда $((V - I)x, h) = 0$, то есть

$$(Vx, h) = (x, h) \quad (\forall x \in D_V). \quad /17/$$

Рассмотрим вектор $\ell_m = \left(\ldots, \delta_{(-2)m}, \delta_{(-1)m}, [\delta_{0m}], \delta_{1m}, \delta_{2m}, \ldots\right)$, где $m \in Z$ и δ_{km} — символ Кронекера. При любом целом $m \neq 0$ вектор $\ell_m \in D_V$. Подставляя в /17/ $x = \ell_m$ / $m \neq 0$ /, получим, что $\breve{h}_{m+1} = h_m$ и, следовательно,

$$h_0 = h_{-1} = h_{-2} = \ldots = a, \; h_1 = h_2 = h_3 = \ldots = b$$

что возможно лишь при $a = b \neq 0$. Таким образом, $h = 0$. Следовательно, A — симметрический оператор.

Пусть $\mathfrak{R}_\lambda$ — дефектное подпространство оператора A и $x_\lambda \in \mathfrak{R}_\lambda$. Тогда

$$\left((A - \lambda I)x, x_\lambda\right) = 0 \quad \left(\forall x \in D_A\right). \qquad /18/$$

А так как $x = (V - I)f$, где $f \in D_V$, и, с учетом равенства /16/ $A = iI + 2i(V - I)^{-1}$, то

$$\begin{aligned}(A - \lambda I)x &= (i - \lambda)x + 2i(V - I)^{-1}x = (i - \lambda)(V - I)f + 2if = \\ &= (i - \lambda)Vf + (\lambda + i)f.\end{aligned} \qquad (19)$$

Но тогда, на основании /18/ и /19/,

$$(i - \lambda)(Vf, x_\lambda) + (\lambda + i)(f, x_\lambda) = 0 \qquad /20/$$

В частности, при $\lambda = i$ равенство /20/ перепишется в виде:

$(f, x_i) = 0$ / $\forall f \in D_V$ /. Следовательно,

$$x_i = (\ldots, 0, 0, [1], 0, 0, \ldots) \qquad /21/.$$

Таким образом, $\mathfrak{R}_i = \langle x_i \rangle$, где вектор x_i определяется равенством /21/.

Аналогично, при $\lambda = -i$ / Vf, x_{-i} / / $\forall f \in D_V$ /, и, следовательно, $\mathfrak{R}_{-i} = \langle x_{-i} \rangle$, где вектор x_{-i} определяется равенством

$$x_{-i} = (\ldots, 0, 0, [0], 1, 0, 0, \ldots) \qquad /22/$$

Рассмотрим семейство унитарных операторов U_θ, которые определяются следующим образом: если

$$x = \left(\ldots, x_{-2}, x_{-1}, [x_0], x_1, x_2, \ldots\right) \in l \qquad /23/$$

$$\text{то } U_{\theta x} = \left(\ldots, x_{-2}, x_{-1}, [x_0], \theta x_1, \theta x_2, \ldots\right) \qquad /24/$$

где $\theta \in C$, $|\theta| = 1$ и $\theta \neq 1$. На основании равенств /14/-/16/ оператор U_θ является U-инвариантным, причем

$$U_\theta x_i = x_i, \; U_\theta x_{-i} = \theta x_{-i} \qquad /25/$$

где x_i и x_{-i} — векторы из дефектных подпространств оператора A, определяемые равенстами /21/ и /22/.

Предположим, что существует U-инвариантное самосопряженное расширение S оператора A. Тогда, если $x \in D_S$, то

$$x = x_0 + x_i + \Phi x_i, \; Sx = Ax_0 - i x_i + i\Phi x_i,$$

где Φ — унитарный оператор, отображающий $\mathfrak{R}_i$ в $\mathfrak{R}_{-i}$. При этом, так как дефектные подпространства $\mathfrak{R}_i$ и $\mathfrak{R}_{-i}$ одномерные, то

$$\Phi x_i = a x_{-i} \; (|a| = 1) \qquad /26/$$

Кроме того, оператор Φ, в силу теоремы 5, также должен быть U-инвариантным. Однако, на основании равенств /25/ и /26/,

$\Phi U_\theta x_i = \Phi x_i, U_\theta \Phi x_i = \theta \Phi x_i$,

и, таким образом, равенство $\Phi U_\theta x_i = U_\theta \Phi x_i$ возможно лишь при. Получили противоречие.

Итак, на основании предыдущего, не существует U-инвариантных самосопряженных расширений рассматриваемого U-инвариантного симметрического оператора A. В то же время регулярные U-инвариантные расщрения оператора A существуют. Таким, например, является диссипативный оператор A_λ, определяемый на линеале $D_{A\lambda} = D_A + \mathfrak{N}_\lambda$ равенством

$$A_\lambda(x_0 + x_\lambda) = Ax_0 + \bar{\lambda} x_\lambda (x_0 \in D_A, x_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda) \qquad /27/$$

где $\mathfrak{N}_\lambda$ — дефектное подпространство оператора A, а λ /$\mathrm{Im}\,\lambda < 0$/ — фиксированная точка.

Отметим одну особенность оператора A_λ в рассматриваемом случае.

<u>Теорема 8.</u> Пусть симметрический оператор A определяется равенством /16/. Тогда точечный спектр оператора A_λ, который определяется равенством /27/, заполняет всю верхнюю полуплоскость.

о Пусть $\lambda \neq i$. Тогда, на основании равенства /20/

$$(\forall f, x_\lambda) = K_\lambda(f, x_\lambda) \qquad /28/$$

где $K_\lambda = \dfrac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$. При этом

$$(|K_\lambda| - 1)\,\mathrm{Im}\,\lambda > 0 \quad (\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0) \qquad /29/$$

Пусть $x_\lambda = (\ldots, \varphi_{-2}, \varphi_{-1}, [\varphi_0], \varphi_1, \varphi_2, \ldots)$. Рассуждая так же, как и при рассмотрении равенства /18/, убеждаемся, что при любом целом $m \neq 0$ $\varphi_{m+1} = K_\lambda \varphi_m$ и, следовательно,

$$\varphi_n = (K_\lambda)^{n-1}\varphi_1, \ \varphi_{-n} = (-K_\lambda)^{-n}\varphi_0 \ (n \in N) \qquad /30/$$

Пусть $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$. Тогда, на основании /29/, $|K_\lambda| > 1$. Поэтому, с учетом /30/, $|\varphi_n| \geq |\varphi_1|$ /$\forall n \in N$/, что возможно лишь при $\varphi_1 = 0$. Таким образом, при $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$ $\varphi_n = 0$ /$n \in N$/. Кроме того, так как $(K_\lambda)^{-1} = K_{\bar{\lambda}}$, то $\varphi_{-n} = K_\lambda^n \varphi_0$. Но тогда / при $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$ и $\varphi_0 = 1$ /

$$x_\lambda = (\ldots, K_{\bar{\lambda}}^2, K_{\bar{\lambda}}, [1], 0, 0 \ldots) \qquad /31/$$

При этом, так как $|K_\lambda| < 1$, то

$$\|x_\lambda\|^2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} |K_{\bar{\lambda}}^n|^2 = \left(1 - |K_{\bar{\lambda}}|^2\right)^{-1}$$

В частности, при $\lambda = i$ $K_{\bar{\lambda}} = 0$ и вектор x_λ совпадает с вектором x_i, который определяется равенством /21/.

Аналогично, при $\mathrm{Im}\,\lambda < 0$ $|K_\lambda| < 1$ и, следовательно, на основании /30/, $\varphi_{-n} = 0$ при любом целом $n \geq 0$. Но тогда, с учетом равенств /30/, при $\varphi_1 = 1$ / и $\mathrm{Im}\,\lambda < 0$ /

$$x_\lambda = (\ldots, 0, 0, [0], 1, K_\lambda, K_\lambda^2, \ldots) \qquad /32/$$

При этом $\| \mathbf{x}_\lambda \|^2 = \left(1 - |\mathbf{K}_\lambda|^2\right)^{-1}$ и при $\lambda = -\mathbf{i}$ вектор $\mathbf{x}_\lambda$ совпадает с вектором $\mathbf{x}_{-\mathbf{i}}$ (см равенство /22/).

Пусть λ_0 /$\mathbf{Im}\,\lambda_0 > 0$/ — фиксированное число. Тогда, как оператор $\mathbf{A}_\lambda$, определяемый равенством /27/, диссипативный, то $\mu = \overline{\lambda}_0 \overline{\in} \sigma_p(\mathbf{A}_\lambda)$. Поэтомы, с учетом формул фон Неймана, произвольный вектор $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_{\bar\lambda}$ из $\mathbf{D}_{A\lambda}$ представим в виде $\mathbf{x} = \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_\mu + \Phi\mathbf{y}_\mu$, то есть

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_{\bar\lambda_0} + \Phi\mathbf{y}_{\bar\lambda_0} \left(\mathbf{y}_0 \in \mathbf{D}_A, \mathbf{y}_{\bar\lambda_0} \in \mathfrak{R}_{\bar\lambda_0}\right),$$

где $\mathbf{y}_{\bar\lambda_0} = \mathbf{a}\mathbf{x}_{\bar\lambda_0}$, $\Phi\mathbf{y}_{\bar\lambda_0} = \mathbf{b}\mathbf{x}_{\lambda_0}$/ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ — некоторые комплексные числа /. Итак, окончательно,

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}_0 + \mathbf{a}\mathbf{x}_{\bar\lambda_0} + \mathbf{b}\mathbf{x}_{\lambda_0}, \qquad /33/$$

где $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{D}_A$, а векторы $\mathbf{x}_{\lambda_0}$ и $\mathbf{x}_{\bar\lambda_0}$, на основании равенств /31/,/32/ и $\mathbf{K}_{\bar\lambda} = \mathbf{K}_\lambda^{-1}$, представимы в виде

$$\mathbf{x}_{\lambda_0} = \left(\ldots, \mathbf{K}_{\bar\lambda_0}^2, \mathbf{K}_{\bar\lambda_0}, [1], 0, 0\ldots\right) \qquad /34/$$

$$\mathbf{x}_{\bar\lambda_0} = \left(\ldots, 0, 0, [0], 1, \mathbf{K}_{\lambda_0}^{-1}, \mathbf{K}_{\lambda_0}^{-2}, \ldots\right) \qquad /35/$$

С учетом равенств /27/,/33/ и формул фон Неймана находим, что

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \overline{\lambda}\mathbf{x}_\lambda = \mathbf{A}\mathbf{y}_0 + \mathbf{a}\lambda_0\mathbf{x}\overline{\lambda}_0 + \mathbf{b}\overline{\lambda}_0\mathbf{x}_{\lambda_0} \qquad /36/$$

При этом

$$\mathbf{x}_0 = (\mathbf{V} - \mathbf{I})\varphi, \quad \mathbf{y}_0 = (\mathbf{V} - \mathbf{I})\psi \; \left(\{\varphi, \psi\} \in \mathbf{D}_V\right) \qquad /37/$$

и, на основании /16/

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{i}(\mathbf{V} + \mathbf{I})\varphi, \quad \mathbf{A}\mathbf{y}_0 = \mathbf{i}(\mathbf{V} + \mathbf{I})\psi,$$

Но тогда равенство /36/ перепишется так:

$$\mathbf{i}(\mathbf{V} + \mathbf{I})\varphi + \overline{\lambda}\mathbf{x}_\lambda = \mathbf{i}(\mathbf{V} + \mathbf{I})\psi + \mathbf{a}\lambda_0\mathbf{x}\overline{\lambda}_0 + \mathbf{b}\overline{\lambda}_0\mathbf{x}_{\lambda_0} \qquad /38/$$

Умножая /33/ на $\mathbf{i}$ и вычитая из /38/, получим, с учетом равенств $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_{\bar\lambda}$ и /37/, что

$$2\mathbf{i}\,\varphi + \left(\overline{\lambda} - \mathbf{i}\right)\mathbf{x}_\lambda = 2\mathbf{i}\,\psi + \mathbf{a}\left(\overline{\lambda}_0 - \mathbf{i}\right)\mathbf{x}_{\bar\lambda_0} + \mathbf{b}\left(\overline{\lambda}_0 - \mathbf{i}\right)\mathbf{x}_{\lambda_0} \qquad /39/$$

Пусть $\mathbf{P}: H \to \mathbf{D}_V^\perp$ -ортопроектор в H. Тогда $\mathbf{P}\varphi = \mathbf{P}\psi = 0$ и, с учетом равенств /32/,/35/ и /34/

$$\mathbf{P}\mathbf{x}_\lambda = \mathbf{P}\mathbf{x}_{\bar\lambda_0} = 0, \quad \mathbf{P}\mathbf{x}_{\lambda_0} = \mathbf{e}_0 \qquad /40/$$

где $\mathbf{e}_0 = \left(\ldots, 0, 0, [1], 0, 0, \ldots\right)$. Применяя оператор $\mathbf{P}$ к обеим частям /39/ и учитывая равенства /40/, получим равенство $\mathbf{b}\left(\overline{\lambda}_0 - \mathbf{i}\right)\mathbf{e}_0 = 0$, откуда следует, что $\mathbf{b} = 0$. Таким образом, при любом λ_0 из верхней полуплоскости $\Phi\mathbf{y}_{\bar\lambda_0} = \mathbf{b}\mathbf{x}_{\lambda_0} = 0$. Но тогда $\mathbf{x} = \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_{\bar\lambda_0}$, $\mathbf{A}_\lambda\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y}_0 + \mathbf{a}\lambda_0\mathbf{x}_{\bar\lambda_0}$.

А так как $y_{\bar{\lambda}_0} = ax_{\bar{\lambda}_0}$, то при $y_0 = 0$ $A_\lambda x_{\bar{\lambda}_0} = \lambda_0 x_{\bar{\lambda}_0}$, то есть $\lambda_0 \in \sigma_P(A_\lambda)$. Таким образом, вся верхняя полуплоскость принадлежит точечному спектру оператора A_λ. O

ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кочубей А.Н. О симметрических операторах, коммутирующих с семейством унитарных операторов ||Функцион. анализ и его прил. - 1979. -Т. 13, N4. -С. 77-78.
2. Кужель А.В. Расширения эрмитовых операторов. -К.: Виша школа, 1989. -55с.
3. Филлипс Р.С. Расширение дуальных подпространств, инвариаитных относительио алгебры // Математика / сб. переводов /. -1964. -Т. 8, N6. -С. 81-108.
4. Штраус А.В. О расширениях и характеристической функции симметрического оператора ||Изв. АН СССР, Сер. матем. - 1968. -Т2. 32, N1. -С. 186-207.