УДК 57.045:574.24

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МЕСТО ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ОПЕРАТОРА: ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В СПУТНИКОВЫХ РАДИОНАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ И ГЕОДИНАМИЧЕСКОМ МОНИТОРИНГЕ

Сулейменов И.Э.

В работе показано, что задача о вычислении координат оператора по данным измерений разности псевдодальности, получаемым с помощью спутниковых радионавигационных систем, имеет аналитическое решение. Обсуждаются возможности повышения точности геодинамического мониторинга, а также повышения точности мониторинга состоянии ионосферы и атмосферы в целом с помощью предложенного алгоритма.
Ключевые слова: координаты оператора, радионавигационные системы, геодинамический мониторинг.

Повышение быстродействия спутниковых радионавигационных систем остается актуальной задачей. В частности, в настоящее время для отыскания координат оператора по данным спутниковых измерений используются численных алгоритмы, которые требуют значительных вычислительных ресурсов, а также времени на обработку информации, поскольку для достижения высокой точности требуется проведение большого числа итераций.

Вместе с тем, можно указать целый ряд задач (геодинамический мониторинг, исследование волновых структур в ионосфере и более низких слоях атмосферы), где увеличение временного разрешения (повышения плотности временных рядов данных) способно предоставить в распоряжение исследователей дополнительные возможности.

Рассмотрим исходные уравнения, возникающие при решении задачи местоопределения координат оператора на основании спутниковых измерений. Они имеют вид:

$$\left|\mathbf{r}_0-\mathbf{R}\right|-\left|\mathbf{r}_j-\mathbf{R}\right|=d_j, \qquad j=1,2,3 \tag{1}$$

где $\mathbf{R}$ - радиус-вектор оператора, $\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_j$ - радиус-векторы спутников, $d_j=c\left(\Delta\tau_j\right)$, c - скорость света, $\Delta\tau_j$ - разность между моментами прихода сигнала от спутника с индексом «0» и спутника с индексом «j».

Для проведения измерений, обеспечивающих определение координат, используется 4 спутника, так как не существует возможности синхронизовать часы, находящиеся в распоряжении оператора и часы, относящиеся к космическому сегменту СРНС.

В развернутой записи:

$$\left|\mathbf{r}_j-\mathbf{R}\right|=\sqrt{\left(x_i-X\right)^2+\left(y_i-Y\right)^2+\left(z_i-Z\right)^2} \tag{2}$$

Уравнения вида (1), как известно, приводятся к стандартному виду, описывающему поверхности второго порядка, в частности, каждое уравнений (1) представляет собой уравнение гиперболоида вращения, которое может быть записано в виде:

$$\left(\mathbf{r}_0^2-\mathbf{r}_j^2-2(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_j)\mathbf{R}\right)^2-2d_j^2\left((\mathbf{r}_0-\mathbf{R})^2+(\mathbf{r}_j-\mathbf{R})^2\right)+d_j^4=0 \qquad (3)$$

Для дальнейшего интерес представляет только квадратичная форма, отвечающая каждому из уравнений (3). Выделяя слагаемые, квадратичные по неизвестным переменным, имеем:

$$G_j=4\left((\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_j)\mathbf{R}\right)^2-4d_j^2\mathbf{R}^2 \qquad (4)$$

Коэффициенты квадратичной формы, таким образом, зависят только от измеряемых на опыте величин $d_j=c(\Delta\tau_j)$ и разностей векторов, отвечающих местоположению спутников. Введем обозначение:

$$\mathbf{g}_j=\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_j$$

Тогда:

$$G_j=4(\mathbf{g}_j\mathbf{R})^2-4d_j^2\mathbf{R}^2 \qquad (5)$$

Квадратичные формы G_j отвечают матрицам специфического вида, которые можно записать как:

$$\mathbf{RGR}=4\mathbf{R}\begin{pmatrix} g_x^j g_x^j & g_x^j g_y^j & g_x^j g_z^j \\ g_y^j g_x^j & g_y^j g_y^j & g_y^j g_z^j \\ g_z^j g_x^j & g_z^j g_y^j & g_z^j g_z^j \end{pmatrix}\mathbf{R}+4d_j^2\mathbf{R}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{R} \qquad (6)$$

Важность возможности представления форм G_j в виде (9) определяется следующим обстоятельством. Набор величин $g_y^j g_x^j$ можно рассматривать как (псевдо)тензор, и соответственно считать, что задача об определении неизвестных величин $\mathbf{R}$ есть задача о решении квадратного уравнения, записанного в некоторой алгебре и имеющего вид:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{R},\mathbf{R})+\mathbf{LR}+\mathbf{a}=0 \qquad (7)$$

где $\mathbf{Q}(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2)$ есть билинейная операция, которая ставит в соответствие двум векторам $(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2)$ набор трех величин, который для преследуемых целей можно рассматривать как вектор, хотя он, строго говоря, вектором и не является (т.е. не преобразуется соответствующим образом при преобразовании системы координат); $\mathbf{L}$ есть линейный оператор, отвечающий линейным членам исходных уравнений (7); $\mathbf{a}$ - «вектор», отвечающий константным членам.

Удобство представления (7) состоит в следующем. Предположим, что для бинарной операции $\mathbf{Q}(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2)$ существует такая тройка векторов $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$, что

$$\mathbf{Q}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = 0 \tag{8}$$

Тогда представление вектора $\mathbf{R}$ через указанные векторы

$$\mathbf{R} = r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3 \tag{9}$$

резко упрощает задачу в силу записи:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3, r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3) &= \\ = r_1^2\mathbf{Q}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + r_2^2\mathbf{Q}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) + r_3^2\mathbf{Q}(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3)&\end{aligned} \tag{10}$$

Справедливость (10) означает, что исходные уравнения (3) одновременно могут быть приведены к виду, не содержащему перекрестных членов:

$$\begin{cases}\lambda_{11}x^2 + \lambda_{12}y^2 + \lambda_{13}z^2 + L_1(x, y, z) \\ \lambda_{21}x^2 + \lambda_{22}y^2 + \lambda_{23}z^2 + L_2(x, y, z) \\ \lambda_{31}x^2 + \lambda_{32}y^2 + \lambda_{33}z^2 + L_3(x, y, z)\end{cases} \tag{11}$$

Такой вид уравнений позволяет значительно упростить задачу. В частности, для случая, соответствующего задаче на плоскости, уравнения (11) приводятся к единственному алгебраическому уравнению 4го порядка, которое может быть решено в радикалах. Случай более высоких степеней в радикалах, как известно, не решается, но возникает возможность для резкого уменьшения числа итераций, обеспечивающего отыскание решения с заданной точностью.

Следует подчеркнуть, что хотя запись (8) по виду напоминает условие ортогональности используемых векторов, она принципиально отличается от указанного условия. (8) объединяет в себе три соотношения, которые должны выполняться одновременно. В частности, для конкретного вида используемых форм, условие (8) отвечает выполнению равенств:

$$\begin{aligned}4(\mathbf{g}_1\mathbf{e}_i)(\mathbf{g}_1\mathbf{e}_j) - 4d_1^2\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i = 0 \\ 4(\mathbf{g}_2\mathbf{e}_i)(\mathbf{g}_2\mathbf{e}_j) - 4d_2^2\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i = 0 \\ 4(\mathbf{g}_3\mathbf{e}_i)(\mathbf{g}_3\mathbf{e}_j) - 4d_3^2\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i = 0\end{aligned} \tag{12}$$

одновременно. Легко видеть, что условия (12) существенно отличаются от обычных условий ортогональности.

Для пояснения приема, позволяющего свести задачу к упрощенной форме, рассмотрим упрощенный случай, отвечающий навигационной задаче на плоскости. В этом случае задача сводится к системе двух квадратных уравнений вида

$$\begin{cases}b_{11}^1x^2 + b_{12}^1xy + b_{22}^1y^2 + 2b_1^1x + 2b_2^1y - 1 = 0 \\ b_{11}^2x^2 + b_{12}^2xy + b_{22}^2y^2 + 2b_1^2x + 2b_2^2y = 0\end{cases} \tag{13}$$

Можно легко показать, что исключение перекрестных членов, содержащих произведение xy, позволяет свести данные уравнения к одному уравнению четвертой степени. Исключение перекрестных членов отвечает переходу к уравнениям вида (11). Покажем, что линейность уравнений вида (12) относительно каждого из векторов $\mathbf{e}_j$ позволяет решать эту задачу, рассматривая более простой случай, отвечающий задачи на плоскости. Оттолкнемся от линейного преобразования координат вида

$$\begin{cases} x' = \lambda_{11}x + \lambda_{12}y \\ y' = \lambda_{21}x + \lambda_{22}y \end{cases} \tag{14}$$

Задача состоит в том, чтобы избавится от перекрестных членов в (13) используя подстановку (14). Т.е. уравнения (14) надо подставить в (13) и отыскать такие значения коэффициентов λ, что перекрестные члены обращаются в ноль. Подчеркнем, что преобразованию подвергаются сразу две кривые второго порядка и поэтому привести их сразу обе к каноническому виду, вообще говоря, нельзя.

При подстановке (14) в (13) вовсе не обязательно следить за полным преобразованием уравнений, достаточно выписать только коэффициенты при перекрестных членах и проследить, чтобы они в совокупности давали ноль (что и отвечает обеспечению выполнений условий (12)). Имеем:

$$\begin{cases} 2b_{11}^1\lambda_{11}\lambda_{12} + b_{12}^1(\lambda_{11}\lambda_{22} + \lambda_{21}\lambda_{12}) + 2b_{22}^1\lambda_{21}\lambda_{22} = 0 \\ 2b_{11}^2\lambda_{11}\lambda_{12} + b_{12}^2(\lambda_{11}\lambda_{22} + \lambda_{21}\lambda_{12}) + 2b_{22}^2\lambda_{21}\lambda_{22} = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Формально записанные уравнения являются нелинейными, однако их можно решить как дробно-линейные. Для этого разделим каждое из записанных уравнений на произведение $\lambda_{22}\lambda_{21}$. Имеем

$$\begin{cases} 2b_{11}^1 w_1 w_2 + b_{12}^1(w_1 + w_2) + 2b_{22}^1 = 0 \\ 2b_{11}^2 w_1 w_2 + b_{12}^2(w_1 + w_2) + 2b_{22}^2 = 0 \end{cases} \tag{16}$$

где $w_1 = \lambda_{11}/\lambda_{21}$, $w_2 = \lambda_{12}/\lambda_{22}$

Из первого уравнения (19) можно выразить w_2 через w_1 и подставить во второе. Имеем

$$\begin{aligned} -2b_{11}^2 w_1 \left(2b_{22}^1 + b_{12}^1 w_1\right) + b_{12}^2\left(2b_{22}^1 + b_{12}^1\right) + \\ + b_{12}^2 w_1\left(b_{12}^1 + 2b_{11}^1 w_1\right) + 2b_{22}^2\left(b_{12}^1 + 2b_{11}^1 w_1\right) = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Полученное квадратное уравнение определяет возможность сведения системы двух исходных квадратных уравнений к единственному уравнению четвертого порядка.

А именно, рассматриваемые уравнения после исключения перекрестных членов приобретают вид

$$\begin{cases} q_{11}x^2 - q_{12}y^2 - 2q_{12}fy - q_{12}f^2 - 1 = 0 \\ -q_{21}x^2 + q_{22}y^2 - 2q_{21}fx - q_{21}f^2 - 1 = 0 \end{cases} \tag{18}$$

Они могут быть сведены к единственному алгебраическому уравнению. Исключим из первого уравнения члены, содержащие y^2, а из второго уравнения - члены, содержащие x^2. Для этого умножим первое уравнение на q_{22}, а второе на q_{12} и вычтем результаты друг из друга.

Получаемые этим способом уравнения имеют весьма простую структуру:

$$\begin{cases} x^2 - p_{11}x - p_{12}y - c_1 = 0 \\ y^2 - p_{21}x - p_{22}y - c_2 = 0 \end{cases}, \qquad (19)$$

которая допускает их сведение к единственному алгебраическому уравнению. Для этого достаточно выразить y из первого уравнения и подставить во второе.

Таким образом, в работе показано, что существует возможность существенного упрощения алгоритма расчета местоположения оператора сугубо аналитическим средствами.

Сулейменов І.Е. **Аналітичне рішення задачі місцевизначення координат оператора: можливості використовування в супутникових радіонавігаційних системах і геодинамічному моніторингу.**
У роботі показано, що задача обчислення координат оператора за даними вимірювань різниці псевдодальності, одержуваним за допомогою супутникових радіонавігаційних систем, має аналітичне рішення. Обговорюються можливості підвищення точності геодінамічного моніторингу, а також підвищення точності моніторингу стану іоносфери і атмосфери в цілому за допомогою запропонованого алгоритму.
Ключові слова: координати оператора, радіонавігаційні системи, геодинамічний моніторинг.

Suleimenov I.E. **Analytic decision of task of determining coordinates of operator: possibilities of using it in satellite radionavigate systems and geodynamic monitoring.**
The task of calculation of co-ordinates of operator from data of measurings of difference of pseudodistance, got by the satellite radionavigate systems, has the analytical decision.Information about possibilities of increasing of the geodynamic monitoring's exactness, and increasing of exactness of monitoring of the state of ionosphere and whole atmosphere by the offered algorithm are given.
Key words: coordinates of the operator, radionavigating systems, geodynamic monitoring.

Статья поступила в редакцию 25.07.2008 г